

Pensieve Header: Polynomiality experiments.

```

βSimplify = Simplify;
SetAttributes[βCollect, Listable];
βCollect[B[ω_, μ_]] := B[
  βSimplify[ω],
  Collect[μ, _h, Collect[#, _t, βSimplify] &]
];
(* "L" for "Labels" *)
hL[β_] := Union[Cases[β, h[s_] => s, Infinity]];
tL[β_] := Union[Cases[β, t[s_] | T_s => s, Infinity]];
dL[β_] := Union[hL[β], tL[β]];
βForm[B[ω_, μ_]] := Module[
  {tails, heads, mat},
  tails = tL[B[ω, μ]]; heads = hL[B[ω, μ]];
  mat = Outer[βSimplify[Coefficient[μ, h[#1] t[#2]]] &, heads, tails];
  PrependTo[mat, t /@ tails];
  mat = Prepend[Transpose[mat], Prepend[h /@ heads, ω]];
  MatrixForm[mat]
];
βForm[else_] := else /. β_B => βForm[β];
tm[x_, y_, z_][β_] := β /. {t[x] -> t[z], t[y] -> t[z], T_x -> T_z, T_y -> T_z};
hm[x_, y_, z_][B[ω_, μ_]] := Module[
  {γx = D[μ, h[x]], γy = D[μ, h[y]], M = μ /. h[x] | h[y] -> 0},
  B[ω, M + h[z] (γx + γy + (γx /. t[i_] => 1) γy)] // βCollect
];
thswap[y_, x_][B[ω_, μ_]] := Module[
  {α, β, γ, δ, ε},
  α = Coefficient[μ, h[x] t[y]];
  β = D[μ, t[y]] /. h[x] -> 0;
  γ = D[μ, h[x]] /. t[y] -> 0;
  δ = μ /. h[x] | t[y] -> 0;
  ε = 1 + α;
  B[ω * ε, Plus[
    α (1 + (γ /. t[i_] => 1) / ε) h[x] t[y],
    β (1 + (γ /. t[i_] => 1) / ε) t[y],
    γ / ε h[x],
    δ - 1 / ε γ * β
  ]] // βCollect
];
dm[x_, y_, z_][β_] := β // thswap[x, y] // hm[x, y, z] // tm[x, y, z];
B /: B[ω1_, μ1_] B[ω2_, μ2_] := B[ω1 * ω2, μ1 + μ2];
Rp[x_, y_] := B[1, (T - 1) * t[x] h[y]];
Rm[x_, y_] := B[1, (1 / T - 1) * t[x] h[y]];
Unprotect[NonCommutativeMultiply];
β_ ** ν_ := Module[
  {ρ, σ, labels},
  ρ = β * (ν /. {h[s_] => h[σ[s]], t[s_] => t[σ[s]], T_s => T_σ[s]});
  labels = Union[Cases[{β, ν}, h[s_] | t[s_] | T_s => s, Infinity]];
  Do[

```

```

    ρ = ρ // dm[s, σ[s], s],
    {s, labels}
];
ρ
];
Format[β_B, StandardForm] := βForm[β];
Rp[1, 2]

$$\begin{pmatrix} 1 & h[2] \\ t[1] & -1+T \end{pmatrix}$$

Rp[1, 2] ** Rm[2, 1]

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[2] \\ t[1] & 0 & \frac{-1+T}{T} \\ t[2] & -1+\frac{1}{T} & -2+\frac{1}{T}+T \end{pmatrix}$$

Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3]

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[2] & h[3] \\ t[1] & 0 & \frac{-1+T}{T} & 0 \\ t[2] & -1+\frac{1}{T} & -2+\frac{1}{T}+T & -1+T \end{pmatrix}$$

Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{T} & h[1] & h[3] \\ t[1] & 0 & -1+T \end{pmatrix}$$

(Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3]

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{T} & h[3] \\ t[1] & -1+T \\ t[2] & 1-T \end{pmatrix}$$

(Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3] ** Rp[3, 1]

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{T} & h[1] & h[3] \\ t[1] & 0 & (-1+T)T \\ t[2] & 0 & 1-T \\ t[3] & -1+T & -(-1+T)^2 \end{pmatrix}$$

(Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3] ** Rp[3, 1] ** Rp[1, 2]

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{T} & h[1] & h[2] & h[3] \\ t[1] & 0 & -1+T & 1-3T+2T^2 \\ t[2] & 0 & 0 & -(-1+T)T \\ t[3] & -1+T & 0 & -(-1+T)^2 \end{pmatrix}$$

(Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) **
Rm[2, 3] ** Rp[3, 1] ** Rp[1, 2] // dm[3, 1, 1]

$$\begin{pmatrix} -1+2T & h[1] & h[2] \\ t[1] & -1+T^2 & -1+T \\ t[2] & -(-1+T)T & 0 \end{pmatrix}$$


```

**Rm[2, 1] ** ((Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) **
Rm[2, 3] ** Rp[3, 1] ** Rp[1, 2] // dm[3, 1, 1])**

$$\begin{pmatrix} -1 + 2T & h[1] & h[2] \\ t[1] & 2(-1 + T) & -1 + T \\ t[2] & 2 - 2T & 0 \end{pmatrix}$$

Rm[2, 1] ** Rm[2, 1] **

**((Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3] ** Rp[3, 1] ** Rp[1, 2] //
dm[3, 1, 1])**

$$\begin{pmatrix} -1 + 2T & h[1] & h[2] \\ t[1] & -\frac{1}{T} + T & -1 + T \\ t[2] & -1 + \frac{2}{T} - T & 0 \end{pmatrix}$$

Rm[1, 3] ** Rm[2, 1] ** Rm[2, 1] **

**((Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3] **
Rp[3, 1] ** Rp[1, 2] // dm[3, 1, 1])**

$$\begin{pmatrix} -1 + 2T & h[1] & h[2] & h[3] \\ t[1] & -\frac{1}{T} + T & -1 + T & -1 + \frac{2}{T^2} - \frac{2}{T} + T \\ t[2] & -1 + \frac{2}{T} - T & 0 & -\frac{2 - 3T + T^3}{T^2} \end{pmatrix}$$

Rm[1, 3] ** Rm[2, 1] ** Rm[2, 1] **

**((Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3] ** Rp[3, 1] ** Rp[1, 2] //
dm[3, 1, 1]) // dm[2, 3, 1]**

$$\begin{pmatrix} 5 + \frac{2}{T^2} - \frac{7}{T} + 3T - 2T^2 & h[1] \\ t[1] & -1 + \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

Rm[1, 3] ** Rm[2, 1] ** Rm[2, 1] **

**((Rp[1, 2] ** Rm[2, 1] ** Rp[2, 3] // dm[1, 2, 1]) ** Rm[2, 3] **
Rp[3, 1] ** Rp[1, 2] // dm[3, 1, 1])**

$$\begin{pmatrix} -1 + 2T & h[1] & h[2] & h[3] \\ t[1] & -\frac{1}{T} + T & -1 + T & -1 + \frac{2}{T^2} - \frac{2}{T} + T \\ t[2] & -1 + \frac{2}{T} - T & 0 & -\frac{2 - 3T + T^3}{T^2} \end{pmatrix}$$

Knot[8, 17] calculation:

Rm[12, 1]

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[7] \\ t[1] & 0 & -1 + \frac{1}{T} \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix}$$

$(\text{Rm}[12, 1] \text{Rm}[2, 7] // \text{dm}[1, 2, 1]) \text{Rm}[8, 3] // \text{dm}[1, 3, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[7] \\ t[1] & 0 & \frac{1-T}{T^2} \\ t[8] & \frac{1-T}{T^2} & -\left(-1 + \frac{1}{T}\right)^2 \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix}$$

$(\text{Rm}[12, 1] \text{Rm}[2, 7] // \text{dm}[1, 2, 1]) \text{Rm}[8, 3] // \text{dm}[1, 3, 1]) \text{Rm}[4, 11] // \text{dm}[1, 4, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[7] & h[11] \\ t[1] & 0 & \frac{1-T}{T^2} & -1 + \frac{1}{T} \\ t[8] & \frac{1-T}{T^2} & -\left(-1 + \frac{1}{T}\right)^2 & 0 \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$((\text{Rm}[12, 1] \text{Rm}[2, 7] // \text{dm}[1, 2, 1]) \text{Rm}[8, 3] // \text{dm}[1, 3, 1]) \text{Rm}[4, 11] // \text{dm}[1, 4, 1])$
 $\text{Rp}[16, 5] // \text{dm}[1, 5, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[7] & h[11] \\ t[1] & 0 & -1 + \frac{1}{T} & 1 - T \\ t[8] & \frac{1-T}{T^2} & -\left(-1 + \frac{1}{T}\right)^2 & 0 \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} & 0 & 0 \\ t[16] & \frac{-1+T}{T^2} & \frac{(-1+T)^2}{T^2} & -2 + \frac{1}{T} + T \end{pmatrix}$$

$(((\text{Rm}[12, 1] \text{Rm}[2, 7] // \text{dm}[1, 2, 1]) \text{Rm}[8, 3] // \text{dm}[1, 3, 1]) \text{Rm}[4, 11] // \text{dm}[1, 4, 1])$
 $\text{Rp}[16, 5] // \text{dm}[1, 5, 1]) \text{Rp}[6, 13] // \text{dm}[1, 6, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 & h[1] & h[7] & h[11] & h[13] \\ t[1] & 0 & -1 + \frac{1}{T} & 1 - T & -1 + T \\ t[8] & \frac{1-T}{T^2} & -\left(-1 + \frac{1}{T}\right)^2 & 0 & 0 \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} & 0 & 0 & 0 \\ t[16] & \frac{-1+T}{T^2} & \frac{(-1+T)^2}{T^2} & -2 + \frac{1}{T} + T & 0 \end{pmatrix}$$

$(((\text{Rm}[12, 1] \text{Rm}[2, 7] // \text{dm}[1, 2, 1]) \text{Rm}[8, 3] // \text{dm}[1, 3, 1]) \text{Rm}[4, 11] // \text{dm}[1, 4, 1])$
 $\text{Rp}[16, 5] // \text{dm}[1, 5, 1]) \text{Rp}[6, 13] // \text{dm}[1, 6, 1] // \text{dm}[1, 7, 1]$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] & h[13] \\ t[1] & \frac{1-T}{T^2} & 1 - T & -1 + T \\ t[8] & -1 + \frac{1}{T} & -\frac{(-1+T)^3}{T} & \frac{(-1+T)^3}{T} \\ t[12] & -1 + \frac{1}{T} & 0 & 0 \\ t[16] & \frac{-1+T}{T} & (-1 + T)^2 & -\frac{(-1+T)^3}{T} \end{pmatrix}$$

((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1])
 Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] // dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11])

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] & h[13] \\ t[1] & \frac{1-T}{T^2} & 1-T & -1+T \\ t[8] & -1+\frac{1}{T} & -\frac{(-1+T)^3}{T} & \frac{(-1+T)^3}{T} \\ t[11] & -1+\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ t[16] & \frac{-1+T}{T} & (-1+T)^2 & -\frac{(-1+T)^3}{T} \end{pmatrix}$$

((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] //
 dm[1, 6, 1] // dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11])

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] \\ t[1] & -2+\frac{1}{T^2}+T & -\frac{(-1+T)^2}{T} \\ t[8] & 5+\frac{1}{T^2}-\frac{3}{T}-4T+T^2 & -\frac{(-1+T)^4}{T^2} \\ t[11] & 1-T & 0 \\ t[16] & -5-\frac{1}{T^2}+\frac{3}{T}+4T-T^2 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \end{pmatrix}$$

((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] //
 dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1])

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] \\ t[1] & 3+\frac{2}{T^2}-\frac{3}{T}-3T+T^2 & -\frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \\ t[11] & 1-T & 0 \\ t[16] & -5-\frac{1}{T^2}+\frac{3}{T}+4T-T^2 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] // dm[1, 7, 1] //
 dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1]) Rp[14, 9])

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[9] & h[11] \\ t[1] & 3+\frac{2}{T^2}-\frac{3}{T}-3T+T^2 & 0 & -\frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \\ t[11] & 1-T & 0 & 0 \\ t[14] & 0 & -1+T & 0 \\ t[16] & -5-\frac{1}{T^2}+\frac{3}{T}+4T-T^2 & 0 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] //
 dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1])
 Rp[14, 9] // dm[11, 14, 11] // dm[1, 9, 1])

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] \\ t[1] & -3+\frac{2}{T}+3T-3T^2+T^3 & -\frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T} \\ t[11] & -\frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T^2} & \frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T^2} \\ t[16] & -5-\frac{1}{T^2}+\frac{3}{T}+4T-T^2 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] //
 dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1])
 Rp[14, 9] // dm[11, 14, 11] // dm[1, 9, 1]) Rp[10, 15]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] & h[15] \\ t[1] & -3 + \frac{2}{T} + 3T - 3T^2 + T^3 & -\frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T} & 0 \\ t[10] & 0 & 0 & -1+T \\ t[11] & -\frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T^2} & \frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T^2} & 0 \\ t[16] & -5 - \frac{1}{T^2} + \frac{3}{T} + 4T - T^2 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] // dm[1, 7, 1] //
 dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1]) Rp[14, 9] //
 dm[11, 14, 11] // dm[1, 9, 1]) Rp[10, 15] // dm[1, 10, 1]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] & h[15] \\ t[1] & -3 + \frac{2}{T} + 3T - 3T^2 + T^3 & -\frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T} & -1+T \\ t[11] & -\frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T^2} & \frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T^2} & 0 \\ t[16] & -5 - \frac{1}{T^2} + \frac{3}{T} + 4T - T^2 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] // dm[1, 7, 1] //
 dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1]) Rp[14, 9] //
 dm[11, 14, 11] // dm[1, 9, 1]) Rp[10, 15] // dm[1, 10, 1] // dm[11, 15, 11]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] \\ t[1] & 8 + \frac{1}{T^2} - \frac{3}{T} - 11T + 8T^2 - 4T^3 + T^4 & -\frac{(-1+T)(-1+3T-6T^2+5T^3-3T^4+T^5)}{T^2} \\ t[11] & -\frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T} & \frac{(-1+T)^3(1-T+T^2)}{T} \\ t[16] & -5 - \frac{1}{T^2} + \frac{3}{T} + 4T - T^2 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)}{T^2} \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] //
 dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1])
 Rp[14, 9] // dm[11, 14, 11] // dm[1, 9, 1]) Rp[10, 15] //
 dm[1, 10, 1] // dm[11, 15, 11] // dm[11, 16, 11]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & h[1] & h[11] \\ t[1] & 8 + \frac{1}{T^2} - \frac{3}{T} - 11T + 8T^2 - 4T^3 + T^4 & -\frac{(-1+T)(-1+3T-6T^2+5T^3-3T^4+T^5)}{T^2} \\ t[11] & -9 - \frac{1}{T^2} + \frac{4}{T} + 11T - 8T^2 + 4T^3 - T^4 & \frac{(-1+T)^2(1-T+T^2)^2}{T^2} \end{pmatrix}$$

(((((Rm[12, 1] Rm[2, 7] // dm[1, 2, 1]) Rm[8, 3] // dm[1, 3, 1]) Rm[4, 11] // dm[1, 4, 1])
 Rp[16, 5] // dm[1, 5, 1]) Rp[6, 13] // dm[1, 6, 1] //
 dm[1, 7, 1] // dm[11, 12, 11] // dm[11, 13, 11] // dm[1, 8, 1])
 Rp[14, 9] // dm[11, 14, 11] // dm[1, 9, 1]) Rp[10, 15] //
 dm[1, 10, 1] // dm[11, 15, 11] // dm[11, 16, 11] // dm[1, 11, 1]

$$\begin{pmatrix} 11 - \frac{1}{T^3} + \frac{4}{T^2} - \frac{8}{T} - 8T + 4T^2 - T^3 & h[1] \\ t[1] & 0 \end{pmatrix}$$